

G1.- Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y + z = 1$ e $y - 3z + 3 = 0$, y que sus otros dos vértices son $A(2, 0, 1)$ y $B(0, -3, 0)$. Halla C y el área del triángulo ABC.

SOLUCIÓN:

Calcularemos el punto C imponiendo las condiciones del problema:

En primer lugar ponemos en paramétricas la recta intersección de los planos dados:

Como no aparece el valor de x, ésta no se encuentra sometida a ninguna restricción y podemos hacer $x = \lambda$, resolviendo el sistema formado por los dos planos obtenemos: $z=1, y=0$; con ello cualquier punto de la recta será de la forma: $C_\lambda(\lambda, 0, 1)$.

A continuación obligamos, aplicando el producto escalar, a que los vectores:

$\vec{C_\lambda A}(2-\lambda, 0, 0)$ y $\vec{C_\lambda B}(-\lambda, -3, -1)$, sean ortogonales: $\vec{C_\lambda A} \cdot \vec{C_\lambda B} = 0$ por tanto:

$(2-\lambda, 0, 0) \cdot (-\lambda, -3, -1) = 0 \rightarrow -2\lambda + \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$
(observa que de las dos soluciones la segunda no es válida para el problema, ¿porqué aparece?).

Sustituyendo en $C_\lambda(\lambda, 0, 1)$ obtenemos el punto C pedido: $C(0, 0, 1)$.

Por último, para hallar el área del triángulo, nos basta obtener la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores \vec{CA} y \vec{CB} : $S = \frac{1}{2} |\vec{CA} \times \vec{CB}|$

$$\vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} : (0, 2, -6) \rightarrow S = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{10} \text{ u}^2.$$

COMPLEMENTOS:

Dibuja, tomando un sistema de referencia ortonormal, la recta y los puntos B y C del problema.

Observa como dada la recta en paramétricas podemos escribir un punto cualquiera de ella como $P_\lambda(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$; esto nos permite hallar puntos que se deslizan sobre rectas y que se encuentran sometidos a condiciones específicas.

Ej. Halla un punto de la recta $\frac{x-2}{2} = \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3}$, cuya distancia a $P(2, 0, -1)$ sea 15 u.

G2.- Halla la perpendicular común a las rectas:

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} ; \quad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Existen varios métodos para resolver este problema (debes repasarlos, pues es un problema clásico de geometría), lo vamos a hacer dando la ecuación implícita de la recta perpendicular a las dos dadas (intersección de dos planos), para ello calculamos dos planos con las características siguientes:

π_r : Plano que contiene a la recta r y es perpendicular a la recta s .

π_s : Plano que contiene a la recta s y es perpendicular a la recta r .

Para calcular estos planos necesitaremos los siguientes elementos:

Punto de la recta r : $P_r (1, 1, 0)$; vector de dirección de la recta r : $\vec{d}_r (0, 0, 1)$

Punto de la recta s : $P_s (0, -1, -1)$; vector de dirección de la recta s : $\vec{d}_s (1, 1, 0)$

Producto vectorial de los vectores \vec{d}_r y \vec{d}_s : $\vec{d}_r \times \vec{d}_s (-1, 1, 0)$.

El plano π_r debe contener a la recta r , por ello nos vendrá determinado por el punto P_r y el vector \vec{d}_r , como además debe ser perpendicular a la recta s tomaremos como segundo vector del plano el producto vectorial (vector perpendicular a las dos rectas) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$:

$$\pi_r \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r \equiv x + y - 2 = 0$$

El plano π_s debe contener a la recta s , por ello nos vendrá determinado por el punto P_s y el vector \vec{d}_s , como además debe ser perpendicular a la recta r tomaremos como segundo vector del plano el producto vectorial (vector perpendicular a las dos rectas) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$:

$$\pi_s \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s \equiv z + 1 = 0$$

Por ello la ecuación de la recta pedida es:

$$p \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

G3.- Sean los puntos A (1, 2, 1), B (2, 3, 1), C(0, 5, 3) y D(-1, 4, 3).

- a) **Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.**
- b) **Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.**
- c) **Calcula el área de dicho rectángulo.**

SOLUCIÓN:

- a) *Podríamos hallar el plano que contiene a tres de los puntos y estudiar si el otro punto está incluido en dicho plano; pero como nos lo pide en el otro orden lo haremos así:*

Para que los cuatro puntos sean coplanarios los vectores: $\vec{AB}(1, 1, 0)$, $\vec{AC}(-1, 3, 2)$ y $\vec{AD}(-2, 2, 2)$ deben ser linealmente dependientes y para ello estudiamos el determinante correspondiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{los vectores son linealmente dependientes} \Rightarrow \text{los puntos son coplanarios.}$$

Para hallar la ecuación del plano tomaremos como punto de éste el punto A, y como vectores

paralelos a él: \vec{AB} y \vec{AC} , con esto obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 3 & 1 & y-2 \\ 2 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0$$

- b) *Para hacerlo, demostramos que el ángulo \hat{A} es recto y que los vectores \vec{AB} y \vec{DC} , \vec{AD} y \vec{BC} son, respectivamente, equipolentes:*

$$\begin{aligned} & \vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \cos \hat{A} \Rightarrow |(1, 1, 0) \cdot (-2, 2, 0)| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \\ & \cos \hat{A} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ. \\ & \left. \begin{aligned} & \vec{AB}(1, 1, 0), \vec{DC}(1, 1, 0) \text{ y } \vec{AD}(-2, 2, 2), \vec{BC}(-2, 2, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ABCD es un rectángulo.} \end{aligned}$$

- c) *Para hallar el área de dicho rectángulo calculamos el valor absoluto del producto*

vectorial de \vec{AB} y \vec{AD} :

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k} \Rightarrow S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 4 \text{ u}^2$$

G11.- Las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

contienen los lados de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

SOLUCIÓN:

A pesar de que el ejercicio da por supuesto que los lados del cuadrado están contenidos en las rectas dadas, vamos a comprobar que eso es cierto, para ello las dos rectas deben ser paralelas.

Estudiamos sus posiciones relativas; tomemos un vector de dirección de cada una de ellas; para hacerlo hallaremos el producto vectorial de los vectores normales a los planos que forman las ecuaciones implícitas de r y s:

$$x + y - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 (1, 1, 0); \quad 2x + 2y + z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 (2, 2, 1)$$

$$x + y - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}'_1 (1, 1, 0); \quad x + y - z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}'_2 (1, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{d}_r (1, -1, 0) \quad ; \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{d}_s (-1, 1, 0)$$

Al ser \vec{d}_r y \vec{d}_s proporcionales, las dos rectas son paralelas o coincidentes; para observar a que posición corresponde de las dos anteriores tomamos un punto de cada una de las rectas y formamos el vector que los une:

En r: para $x = 0 \Rightarrow y = 2, z = 0 \Rightarrow R(0, 2, 0)$

En s: para $x = 0 \Rightarrow y = 6, z = 0 \Rightarrow S(0, 6, 0)$

Luego el vector será: $\vec{RS} (0, 4, 0)$, que, evidentemente no es proporcional a los anteriores, por tanto las dos rectas son paralelas.

a) Para hallar el área del cuadrado, basta elevar al cuadrado la distancia entre ambas rectas; este problema se puede resolver de varias formas, lo haremos aplicando la fórmula:

$$dist(r, s) = dist(R, s) = \frac{|\vec{RS} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|}; \quad \vec{RS} \times \vec{d}_s (0, 0, 4) \Rightarrow |\vec{RS} \times \vec{d}_s| = 4; \quad |\vec{d}_s| = \sqrt{2}$$

$$dist(r, s) = \frac{4}{\sqrt{2}} u., \text{ por tanto para la superficie pedida: } S = 8 u^2.$$

b) Para obtener el plano que contiene a ambas rectas, tomaremos como vectores paralelos al plano los vectores: $\vec{RS} (0, 4, 0)$ y $\vec{d}_r (1, -1, 0)$, y como punto del plano, el punto $R(0, 2, 0)$

$$\pi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 4 & -1 & y - 2 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \Pi: z = 0$$

G4.- Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$, y la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r .

b) ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r ?, en caso

afirmativo determina sus ecuaciones.

SOLUCIÓN:

a) Un plano que contenga a la recta r y que sea perpendicular a π nos vendrá determinado por un punto P de la recta un vector de dirección de la recta \vec{d} y un vector perpendicular al plano; por tanto, de las ecuaciones de la recta y el plano, obtenemos directamente:

$P(1, 1, 1)$; $\vec{d}(1, 1, 3)$; $\vec{n}(2, 1, -1)$, y para la ecuación del plano pedido:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ 3 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 7y + z + 2 = 0$$

b) Para que exista algún plano paralelo al plano π que contenga a la recta r , ambos deben ser paralelos, estudiamos sus posiciones relativas:

$2(1 + \lambda) + 1 + \lambda - (1 + 3\lambda) + 7 = 0 \Rightarrow 0\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$ recta y plano no tienen puntos en común \Rightarrow recta r y plano π paralelos \Rightarrow existe un plano π' que contiene a r y es paralelo a π .

Buscamos la ecuación de dicho plano, para ello tomaremos la ecuación del haz de planos que contienen a la recta r , formamos la ecuación continua de r : $x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{3}$, a partir de

ella la ecuación implícita: $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - z - 2 = 0 \end{cases}$ con lo que la ecuación buscada es:

$x - y + k(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow (3k + 1)x - y - kz - 2k = 0$; de todos los planos que contienen a r buscamos aquel que es paralelo a π , por ello sus vectores perpendiculares deben ser proporcionales: vector perpendicular al plano π : $\vec{n}(2, 1, -1)$, vector perpendicular a π' :

$\vec{n}'(3k + 1, -1, -k)$, imponemos la proporcionalidad: $\frac{3k + 1}{2} = -1 = k \Rightarrow k = -1$, con ello el

plano buscado es: $\pi' \equiv 2x + y - z - 2 = 0$.

G5.- Halla la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 2}{-3} \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vamos a resolver el ejercicio de dos formas distintas:

a) En primer lugar lo haremos hallando un punto en cada una de ellas de forma que la distancia entre ellos coincida con la distancia entre las dos rectas, es decir calculamos los puntos en las rectas más próximos entre si; estos puntos se encontrarán en la perpendicular a ambas, por tanto si los unimos con un vector, éste debe ser ortogonal a los vectores de dirección de las rectas r y s, ésta será la condición que nos permita hallar los puntos en cuestión.

Hallamos la ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$$

Con ello, un punto de la recta r será de la forma $R_\lambda(0, \lambda, 5 - 3\lambda)$, y un punto de la recta s será de la forma: $S_\mu(2 - \mu, 0, \mu)$; formamos el vector que une estos dos puntos: $\vec{R_\lambda S_\mu}(2 - \mu, -\lambda, \mu + 3\lambda - 5)$

Imponemos la condición de que el vector hallado sea perpendicular a los vectores: $\vec{d}_r(0,1,-3)$ y $\vec{d}_s(-1,0,1)$, vectores de dirección de las rectas r y s, respectivamente:

$$\vec{R_\lambda S_\mu} \perp \vec{d}_r \Rightarrow (2 - \mu, -\lambda, \mu + 3\lambda - 5) \cdot (0, 1, -3) = 0 \Rightarrow -\lambda - 3\mu - 9\lambda + 15 = 0 \Rightarrow 10\lambda + 3\mu = 15$$

$$\vec{R_\lambda S_\mu} \perp \vec{d}_s \Rightarrow (2 - \mu, -\lambda, \mu + 3\lambda - 5) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Rightarrow -2 + \mu + \mu + 3\lambda - 5 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 2\mu = 7$$

Resolvemos el sistema anterior en λ y μ : $\mu = 25/11$, $\lambda = 9/11$; para los puntos tenemos:

$$R(0, 9/11, 28/11) \text{ y } S(-3/11, 0, 25/11) \Rightarrow d(s,r) = d(R, S) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{3}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{99}{121}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} u$$

b) Podemos hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan aplicando la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|\vec{d}_r, \vec{d}_s, R\vec{S}|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \quad \text{Calculamos } |\vec{d}_r, \vec{d}_s, R\vec{S}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -11 & -9 & 33 \end{vmatrix} = \left| -\frac{33}{11} \right| = \frac{33}{11} ;$$

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 3, 1) \Rightarrow |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = \sqrt{11} \Rightarrow d(r,s) = \frac{3\sqrt{11}}{11} u$$

G6.- Considera los puntos: P(6, -1, -10), Q(0, 2, 2) y R, que es el punto de intersección del plano: $\pi \equiv 2x + \lambda y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

SOLUCIÓN:

En primer lugar calcularemos el punto intersección de la recta y el plano en función del parámetro, para ello resolveremos el sistema formado por los tres planos: dos de la ecuación implícita de la recta y el plano dado π (en realidad lo que resolvemos son los infinitos sistemas que dependen de λ) con ello obtendremos el punto R_λ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + \lambda y + z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + z = 2 - \lambda \\ x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow R_\lambda (2 - \lambda, 1, \lambda - 2)$$

Encontramos el punto R pedido imponiendo la condición de alineación de los tres puntos, para ello debe ocurrir que los vectores: \vec{PQ} y \vec{PR}_λ sean proporcionales:

$\vec{PQ}(-6, 3, 12)$; $\vec{PR}_\lambda(-\lambda - 4, 2, \lambda + 8)$, imponiendo la condición de proporcionalidad:

$$\frac{-\lambda - 4}{-6} = \frac{2}{3} = \frac{\lambda + 8}{12} \Rightarrow \lambda = 0; \text{ y el punto R tendrá de coordenadas: } (2, 1, -2)$$

G7.- Considera el punto A (0 , 1 , -1) , la recta : $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 2$. Halla la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

SOLUCIÓN:

Para hallar la recta r' pedida lo podemos hacer hallando el plano π' que contiene al punto A y es paralelo al plano π , a continuación hallaremos el punto A' intersección del plano π' con la recta r, y por último, la recta pedida será la recta que pasa por los puntos A y A' :

Haz de planos paralelos a $\pi \equiv x - 2y - z = 2 \Rightarrow \pi_k \equiv x - 2y - z - 2 + k = 0$, de todos ellos hallamos el que pasa por A: $-2 + 1 - 2 + k = 0 \Rightarrow k = 3$, con lo que el plano $\pi' \equiv x - 2y - z + 1 = 0$.

Intersección del plano π' con la recta r:
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = -1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{array} \right\} \text{ Para resolver este sistema aplicamos el}$$

método de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4; \quad x = -14/8, \quad y = -5/8, \quad z = 4/8, \text{ luego: } A'(-14/8, -5/8, 4/8)$$

Hallamos, por último, la ecuación de la recta r' calculando su ecuación continua:

$$r' \equiv \frac{x}{-14/8} = \frac{y-1}{-5/8-1} = \frac{z+1}{4/8+1} \Rightarrow r' \equiv \frac{8x}{-14} = \frac{8y-8}{-13} = \frac{8z+8}{12}$$

G8.- Dados los vectores: \vec{u} (2 , 1 , 0) y \vec{v} (- 1 , 0 , 1), halla un vector unitario \vec{w} que sea coplanario con \vec{u} y \vec{v} , y ortogonal a \vec{v} .

SOLUCIÓN:

Para que los tres vectores sean coplanarios el vector \vec{w} debe ser combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , es decir deben existir dos números reales λ y μ tal que:

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \lambda (2 , 1 , 0) + \mu (- 1 , 0 , 1) \Rightarrow \vec{w} (2 \lambda - \mu , \lambda , \mu).$$

Para que \vec{w} y \vec{v} sean ortogonales, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (2 \lambda - \mu , \lambda , \mu) \cdot (- 1 , 0 , 1) = (0 , 0 , 0) \Rightarrow - 2 \lambda + \mu + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu , \text{ con lo que el vector } \vec{w} \text{ debe ser de la forma:}$$

$$\vec{w} (\lambda , \lambda , \lambda) , \forall \lambda \in R^* (R^* : \text{números reales sin el cero})$$

COMPLEMENTOS:

- Observa que existen infinitos vectores que cumplen las condiciones pedidas, ¿ a qué se debe ?.
- De los posibles valores para λ , hemos eliminado el valor cero, ¿ porqué ?.

G9.- Sean los puntos A (1 , 0 , - 1) y B(2 , - 1 , 3).

- Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por A y por B.
- Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos ABCD sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN:

a) Para hallar la distancia de un punto (O) a la recta r que pasa por A y B, emplearemos la fórmula:

$$d(O,r) = \frac{|A\vec{O} \times A\vec{B}|}{|A\vec{B}|} , \text{ siendo : } A\vec{O}(-1,0,1); A\vec{B}(1,-1,4) \text{ y } |A\vec{B}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} , \text{ calculamos el}$$

$$\text{producto vectorial y su módulo: } A\vec{O} \times A\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow A\vec{O} \times A\vec{B}(-1,5,1)$$

$$|A\vec{O} \times A\vec{B}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} , \text{ y para la distancia pedida: } d(O,r) = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u.$$

b) Por tratarse de un paralelogramo si la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas, la distancia entre A y C coincidirá con la distancia del origen de coordenadas a recta que pasa por A y B: $d(A , C) = \frac{\sqrt{6}}{2} u.$; y para la otra dimensión: $d(A , B) = |A\vec{B}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} u$

$$\text{Por tanto el área del paralelogramo será: } S = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3}u^2$$

G10.- Calcula el área del triángulo de vértices $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ y C , siendo C la proyección ortogonal del punto $(1, 1, 1)$ sobre el plano $x + y + z = 1$

SOLUCIÓN:

Calculamos, en primer lugar, la proyección ortogonal del punto $P(1, 1, 1)$ sobre el plano

$$\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$$

Para ello obtendremos una recta r que pase por P y sea perpendicular a π , a continuación hallamos el punto C (proyección de P sobre el plano π) como intersección de la recta r y el plano π :

La recta r nos vendrá determinada por el punto P y un vector \vec{n} perpendicular al plano π ; el vector \vec{n} lo obtenemos directamente de la ecuación del plano: $\vec{n}(1, 1, 1)$, con lo que la recta tendrá de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos, a continuación, el punto C : $(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) = 1 \Rightarrow 3 + 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -2/3$, y sustituyendo en r : $C(1/3, 1/3, 1/3)$.

Por último para calcular el área del triángulo pedida lo haremos calculando la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores \vec{AB} y \vec{AC} :

$$\vec{AB}(0, 1, -1) \quad ; \quad \vec{AC}(1/3, 1/3, -2/3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k} \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{6} u^2$$

G12.- Considera las rectas:

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}, \quad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Halla la ecuación de una recta que corte a \mathbf{r} y a \mathbf{s} , y que sea perpendicular al plano $z = 0$.

SOLUCIÓN:

Encontraremos la ecuación de la recta pedida como intersección de dos planos π y π' que tendrán las características siguientes:

El plano π deberá contener a la recta \mathbf{r} y ser perpendicular al plano $z = 0$, para ello lo obtendremos a partir de un punto P de la recta \mathbf{r} , un vector \vec{d}_r de dirección de \mathbf{r} y un vector \vec{n} perpendicular a $z = 0$:

Ponemos \mathbf{r} en paramétricas: $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$, de forma inmediata obtenemos a partir de esta

ecuación: $P(0, 0, 2)$ y $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; para el vector ortogonal al plano: $\vec{n}(0, 0, 1)$, por tanto

$$\text{el plano } \pi \text{ será: } \pi \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

El plano π' deberá contener a la recta \mathbf{s} y ser perpendicular al plano $z = 0$, para ello lo obtendremos a partir de un punto P' de la recta \mathbf{s} , un vector \vec{d}_s de dirección de \mathbf{s} y un vector \vec{n} perpendicular a $z = 0$:

Ponemos \mathbf{s} en paramétricas: $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$, a partir de ella obtenemos: $P'(1, 0, 3)$

$\vec{d}_s(-1, 1, 0)$; con ellos y con $\vec{n}(0, 0, 1)$ para π' tenemos:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 1$$

Y para la recta pedida: $\mathbf{p} \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$