

**A1.- Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ ax + by + z = 4 \end{cases}$$

**tiene, al menos, dos soluciones distintas.**

**SOLUCIÓN:**

Para que el sistema tenga, al menos, dos soluciones distintas debe ser compatible indeterminado, luego aplicaremos el teorema de Rouché obligando a que los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada sean iguales y menores que 3:

Como el menor :  $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ , el rango de la matriz de los coeficientes es, al menos, 2.

Siendo:  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 5a - 3b + 4 = 0$ , los valores de a y b que cumplen la condición

anterior hacen que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2.

Orlamos el menor  $M_1$  con la última fila y la última columna de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ a & b & 4 \end{vmatrix} = -4a + 16 = 0, \text{ los valores de } a \text{ ( y de } b \text{ ) que cumplan esta condición}$$

hacen que el rango de la matriz ampliada sea 2.

Por tanto las soluciones del problema serán los valores de a y de b que cumplan, simultáneamente las dos condiciones apuntadas, que resolviendo el sistema resultan ser:  $a = 4, b = 8$

**COMPLEMENTOS:**

- Observa que el enunciado dice: “tiene, al menos, dos soluciones distintas”.  
¿ Puede tener un sistema como el anterior solo dos soluciones distintas o en este caso tendría infinitas ?; plantéatelo desde un punto de vista algebraico y desde un punto de vista geométrico.

**A2.-Sabiendo que la matriz**  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$  **tiene rango 2, ¿cuál es el valor de**

**a?**

**Resuelve el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Como en la matriz A, el menor  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ , el  $\text{rag}(A) \geq 2$ , por tanto para que  $\text{rag}(A)=2$  basta que  $\det A = 0$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -3a - 15, \quad -3a - 15 = 0 \quad \longrightarrow \quad a = -5$$

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - 4y - 2z = 0 \\ -x - 6y - 5z = -1 \end{cases}$$

Es compatible indeterminado, pues la matriz de los coeficientes (teorema de Rouché) tiene rango 2, y para la matriz ampliada A' (ampliamos el menor  $\Delta$  con la tercera fila y cuarta columna) tenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ luego el } \text{rag}(A') = 2 = \text{rag}(A), \text{ podemos pues, teniendo en cuenta}$$

el menor  $\Delta$ , prescindir de la tercera ecuación, hacer  $z = \lambda$ , y resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 - \lambda \\ x - 4y = 2\lambda \end{cases}, \text{ aplicaremos el método de Cramer: } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2\lambda & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4\lambda + 4\lambda = 8\lambda - 4; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 - \lambda \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 6\lambda - 1 + \lambda = 7\lambda - 1$$

Las soluciones serán:  $x = \frac{8\lambda - 4}{-10}; \quad y = \frac{7\lambda - 1}{-10}; \quad z = \lambda; \quad \forall \lambda \in R$

A3.- Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula  $A \cdot B$ ,  $A \cdot C$ ,  $A^t \cdot B^t$  y  $C^t \cdot A^t$ , siendo  $A^t$ ,  $B^t$  y  $C^t$  las matrices traspuestas de  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente.
- b) Razona cuáles de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $A \cdot B$  tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

SOLUCIÓN:

a) Recuerda que para multiplicar matrices el número de columnas de la 1ª debe coincidir con el número de filas de la 2ª, y el resultado del producto es una matriz que tiene de dimensión el número de filas de la 1ª y el número de columnas de la 2ª:

$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = M_{2 \times 2}$ . Por tanto:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz traspuesta de una matriz es la que resulta de cambiar filas por columnas en la matriz inicial, por ello:

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria y suficiente que sea regular (su determinante asociado sea distinto de cero), por tanto es evidente que no la tendrán aquellas que no son cuadradas, es decir  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

En cuanto a la matriz  $A \cdot B$ , al ser la matriz unidad coincidirá con su inversa:

$$(A \cdot B)^{-1} = A \cdot B$$

COMPLEMENTOS:

\* Recuerda como se halla la matriz inversa de una matriz dada  $A$ : supuesto  $\det(A) \neq 0$ ,  
 $A^{-1} = (1/\det(A)) \cdot \text{adj}(A^t)$ .

Ej. Halla la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y a continuación comprueba que está correctamente hallada.}$$

**A4.- Considera el sistema de ecuaciones:** 
$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

- a) Clasifica el sistema según los valores de  $m$ .  
 b) Calcula los valores de  $m$  para los que el sistema tiene una solución en la que  $x = 3$ .

**SOLUCIÓN:**

- a) La clasificación del sistema la haremos aplicando el teorema de Rouché:  
 Consideramos las matrices:  $A$  matriz de los coeficientes y  $A'$  matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix} ; \quad A' = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de  $A$  en función de  $m$ : al tener  $A$  algún elemento distinto de

0 el  $\text{rag}(A) \geq 1$ ; estudiamos  $\det(A)$ :  $\det(A) = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$ .

Los valores de  $m$  que anulan al  $\det(A)$  son:  $-m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$ . Con ello tenemos:

Para  $m \neq \pm 1 \Rightarrow \text{rag}(A) = \text{rag}(A') = 2 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$ .

Para  $m = 1 \Rightarrow \text{rag}(A) = 1$ ; estudiamos  $\text{rag}(A')$ : al sustituir  $m$  por 1 la matriz  $A'$  nos queda:  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , obviamente su rango es 1 (tiene las dos filas iguales)

$\Rightarrow \text{rag}(A) = \text{rag}(A') = 1 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$ .

Para  $m = -1 \Rightarrow \text{rag}(A) = 1$ ; estudiamos  $\text{rag}(A')$ : al sustituir  $m$  por  $-1$  la matriz  $A'$  nos queda:  $A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ , que contiene al menor:  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rag}(A') = 2$ , con ello:  $\text{rag}(A) \neq \text{rag}(A') \Rightarrow \text{sistema incompatible}$ .

- b) Para resolver este apartado hacemos  $x = 3$  en el sistema, y resolvemos el sistema

resultante: 
$$\begin{cases} 3m - y = 1 \\ 3 - my = 2m - 1 \end{cases}$$
, se trata de un sistema no lineal que

podemos resolver aplicando el método de sustitución:

$$y = 3m - 1 \Rightarrow 3 - m(3m - 1) = 2m - 1 \Rightarrow -3m^2 - m + 4 = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = -4/3.$$

**A5.- Se sabe que :**  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$  . **Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:**

**a)**  $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$  ; **b)**  $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  ; **c)**  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

**SOLUCIÓN:**

**a)** *Al multiplicar una línea ( fila o columna ) de un determinante por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número:*

$$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 15 \cdot (-2) = -30$$

**b)** *Al intercambiar entre si dos líneas paralelas de un determinante, éste cambia de signo:*

$$\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-2) = 6$$

**c)** *Si una línea de un determinante está formada por términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes obtenidos sustituyendo los términos por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.*

*Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales vale cero:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$$

**A6.- Considera el sistema de ecuaciones**

$$\left. \begin{aligned} x + \lambda y &= \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z &= 1 \\ \lambda x + y &= 2 + \lambda \end{aligned} \right\}$$

- a) **Clasifica el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ .**  
 b) **Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.**

**SOLUCIÓN:**

a) *Para la discusión del sistema aplicamos el teorema de Rouché:*

*Calculamos, en función de  $\lambda$ , el rango de la matriz de los coeficientes A:*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \quad ; \quad \text{haciendo: } \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

*obtenemos:  $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .*

*Con ello obtenemos que para  $\lambda \neq 1, -1$  el sistema es de Cramer  $\Rightarrow$  sistema compatible determinado.*

*Para  $\lambda_1 = 1$  el sistema queda:*

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ que tiene dos ecuaciones iguales y la tercera contradictoria } \Rightarrow \text{ sistema incompatible.}$$

*Para  $\lambda_2 = -1$  el sistema queda:*

$$\left. \begin{aligned} x - y &= -1 \\ -x + y - 2z &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ la tercera ecuación es proporcional a la primera, además, siendo la matriz de}$$

*los coeficientes:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  tenemos en ella el menor  $M = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rag}(A)=2$*

*orlando M con la tercera fila y cuarta columna de la matriz ampliada A' obtenemos:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rag}(A') = 2 = \text{rag}(A) < \text{o de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado.}$$

a) *Resolvemos el sistema para  $\lambda_2 = -1$ ; eliminamos la tercera ecuación por ser proporcional a la*

*primera:* 
$$\left. \begin{aligned} x - y &= -1 \\ -x + y - 2z &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ haciendo } x = \mu \Rightarrow y = 1 + \mu, z = 0, \text{ y tenemos que las}$$

*soluciones del sistema son:  $x = \mu, y = 1 + \mu, z = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}$*

**A7.- Considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a + 2)x - 12y + 12z = 0 \end{array} \right\}$$

**Determina el valor de a para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de a.**

**SOLUCIÓN:**

*Se trata de un sistema homogéneo cuadrado de tres ecuaciones con tres incógnitas que siempre será compatible determinado, es decir tendrá la solución trivial ( $x = y = z = 0$ ).*

*Para que el sistema sea compatible indeterminado debe ser el determinante de la matriz de los coeficientes igual a cero :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ (a+2) & -12 & 12 \end{vmatrix} = -190 + 19a = 0 \Rightarrow a = 10$$

*Sustituimos el valor de a en el sistema y obtenemos:*

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \text{ Buscamos un menor de orden dos distinto de cero ( si existe el sistema}$$

*dependerá de un parámetro, ya que  $\text{rg}(A) = 2$  ):*

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \text{ eliminamos la segunda ecuación, del sistema y haciendo } z = \lambda$$

*resolvemos el sistema resultante:*

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -\lambda \\ x - y = -\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow x = -\lambda, y = 0, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

**A8.-Denotamos por  $M^t$  a la matriz traspuesta de una matriz  $M$ .**

a) Sabiendo que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y que  $\det(A) = 4$ , calcula los siguientes

determinantes:

$$\text{Det}(-3A^t) \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$$

b) Sea  $I$  la matriz identidad de orden tres y sea  $B$  una matriz cuadrada tal que  $B^3 = I$ . Calcula  $\det(B)$ .

c) Sea  $C$  una matriz cuadrada tal que  $C^{-1} = C^t$ . ¿Puede ser  $\det(C) = 3$ ?  
Razona la respuesta.

**SOLUCIÓN:**

a) Para multiplicar una matriz por un número multiplicamos cada elemento de la matriz por dicho número, a su vez para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar por él una línea del determinante, y el determinante de una matriz coincide con el determinante de su matriz traspuesta; teniendo en cuenta las propiedades anteriores:

Al multiplicar  $A^t$  por  $-3$  cada elemento de  $A^t$  queda multiplicado por  $-3$  y su determinante coincidirá con el determinante correspondiente al de la matriz  $A$  multiplicada por  $-3$ , para hallar este último podemos sacar  $-3$  de cada una de las dos filas con lo que:

$$\det(-3A^t) = (-3)^2 \cdot \det(A^t) = (-3)^2 \cdot \det(A) = 9 \cdot 4 = 36$$

Apoyándonos en las propiedades enunciadas, y teniendo en cuenta que al intercambiar entre si dos líneas paralelas en un determinante este cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = 2(-3) \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = 2(-3)(-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 = 24$$

b) Si  $A \cdot B = I \Rightarrow |A \cdot B| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1$ , por tanto:

$$B^3 = B \cdot B \cdot B \Rightarrow |B^3| = |B| \cdot |B| \cdot |B| = |B|^3 \Rightarrow |B|^3 = 1 \Rightarrow \det B = 1$$

c) De ser  $C^{-1} = C^t \Rightarrow C \cdot C^t = I \Rightarrow |C \cdot C^t| = |I| \Rightarrow |C| \cdot |C^t| = 1 \Rightarrow |C| \cdot |C| = 1$  (ya que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta) con lo que:

$$|C|^2 = 1 \Rightarrow |C| = \pm 1 \Rightarrow \det(C) \neq 3$$

**A9.- Considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left. \begin{array}{l} mx + 2y + z = 2 \\ x + my = m \\ 2x + mz = 0 \end{array} \right\}$$

- a) **Determina los valores de m para los que  $x = 0$ ,  $y = 1$  y  $z = 0$  es solución del sistema.**  
 b) **Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible.**  
 c) **Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.**

**SOLUCIÓN:**

Aplicamos el teorema de Rouché para la discusión del sistema:

estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:  $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$ ; el determinante

correspondiente vale:  $\det(A) = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 - 2m - 2m = m^3 - 4m$ , y por tanto los

valores que anulan al determinante son:  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 2$  y  $m_3 = -2$ .

\* Para  $m \neq 0, 2, -2 \Rightarrow$  sistema compatible determinado (solución única)

\* Para  $m_1 = 0$  el sistema queda:  $\left. \begin{array}{l} 2y + z = 2 \\ x = 0 \\ 2x = 0 \end{array} \right\} \text{rag}(A) = \text{rag}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas (siendo}$

$A'$  la matriz ampliada)  $\Rightarrow$  el sistema es compatible indeterminado, y las soluciones son de la forma:  $x = 0$ ,  $y = \lambda$ ,  $z = 2 - 2\lambda$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

\* Para  $m_2 = 2$  el sistema queda:  $\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + z = 2 \\ x + 2y = 2 \\ 2x + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , como

$M = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rag}(A) = 2$ ; ampliando el menor  $M$  con la tercera fila y la cuarta columna

de la matriz ampliada, tenemos:  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rag}(A') = 2$ ; con ello:  $\text{rag}(A) = \text{rag}(A') = 2 < n^\circ$  de

incógnitas  $\Rightarrow$  sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

\* Para  $m_3 = -2$  el sistema queda:  $\left. \begin{array}{l} -2x + 2y + z = 2 \\ x - 2y = -2 \\ 2x - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , como

$$M = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rag}(A) = 2; \text{ ampliando el menor } M \text{ con la tercera fila y la cuarta}$$

$$\text{columna de la matriz ampliada tenemos: } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rag}(A') = 2; \text{ con ello:}$$

$\text{rag}(A) = \text{rag}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).}$

*Resumiendo el estudio anterior y teniendo en cuenta que si sustituimos en el sistema los valores*

$$x = 0, y = 1, z = 0 \text{ obtenemos: } \left. \begin{array}{l} m \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\ 0 + m \cdot 1 = m \\ 2 \cdot 0 + m \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \text{ que se cumple } \forall m \in \mathbb{R}, \text{ podemos resumir los}$$

*resultados obtenidos respondiendo a los apartados del ejercicio:*

- a)** La solución  $x = 0, y = 1, z = 0$  es válida  $\forall m \in \mathbb{R}$ .
- b)** No existe ningún valor real de  $m$  para el que el sistema sea incompatible.
- c)** El sistema tiene infinitas soluciones para  $m = 0, 2, -2$ .

**A10.- Se sabe que el sistema de ecuaciones:**

$$\left. \begin{array}{l} x + \alpha y = 1 \\ x + \alpha z = 1 \\ y + z = \alpha \end{array} \right\}$$

**tiene solución única.**

- a) Prueba que  $\alpha \neq 0$ .**  
**b) Halla la solución del sistema.**

**SOLUCIÓN:**

- a) Para que el sistema tenga solución única, al ser cuadrado, debe ser de Cramer, por tanto el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\alpha \Rightarrow \text{para que } \Delta \neq 0 \text{ debe ser } -2\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$$

- b) Aplicamos el método de Cramer para resolverlo:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha}{-2\alpha} = -\frac{1}{2}\alpha^2 + 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-\alpha^2}{-2\alpha} = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{2}\alpha$$

Como para cada valor de  $\alpha \neq 0$  tenemos un sistema compatible determinado, para cada uno de dichos sistemas la solución será:

$$x = -\frac{1}{2}\alpha^2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}\alpha, \quad z = \frac{1}{2}\alpha$$